1019. Krull ノ豫想ニツイテ, II

中山　正（阪大）

I ニオイテ Krull ノ豫想ノべくとる束ノ場合（ソノ

場合ハサウナルト予想シタノデハナカッタカモ知レマセンガ）ノ反例ヲ述ベタ、次ニ Krull ノ豫想ノ本来ノ場合即チ整域ノ場合ニツイテ反例ヲ述べヨウ。即チ vollständig ganz-abgeschlossen[1] デシカモ speziell ナ Bewertungsringe ノ durchschnitt トシテ表ハサレナイ様ナ整域ヲ作ル。ソレニハべくとる束ニオケル反例ニ依存シテ次ノ様ナ構成ヲスル：（I ニ於ル如ク）

A ヲ Complete ナぶーる束デ I ニオケル條件ヲミタスモノ、即チソノ表現空間 Ω（完全不連結且ツびこむぱくと）ニオイテ Ω ノ任意ノ一点ニ對シテ其処デ確カニ $+\infty$ ニナッテ nowhere dense set ヲノゾイテハ有限値ヲトル連続函数が存在スル様ニナッテヰルモノデアル。

然ルトキ Ω ノ上ノ連続函数デ nowhere dense set ヲノゾイテ有限ナルモノノ全体が一ツノあるきめです的べくとる束ヲナシ、シカシソレハ如何ナル空間ノ有限値ノ函数ノ束ニヨッテモ同型ニ表現サレナイノデアッタ。

サテ、実数又ハ $\pm\infty$ 値ノ函数トセズ、（正又ハ負ノハ0ノ）整数及ビ $\pm\infty$ ノ値ヲトル連続函数デ而モ $\pm\infty$ ニナルノハ nowhere dense set ノミナルモノノ全体ヲ考ヘレバコレがヤハリ束群ニナルコトハ明カデアル（上述ノ部分束群）、勿論あるきめです的デアル、サテ我々ノ空間 Ω デハソノ任意ノ点ニ対シテ、ソコデ $+\infty$ ニナル、コノ様ナ函数が実際存在スル。

1) 即チ Artin ノ意味デノ ganz-abgeschlossen.

ソレハIデ實際作ッタ函數ハ整數又ハ$\pm\infty$ノミヲトルモノデアッタ. ヨッテIIニ於ケルト全ク同様ニシテコノ束群モ如何ナル空間ノ有限実函數ノ束群デ同型ニ表ハサレナイ.

我々ノ空間Ωノ各点$\mathfrak{z}$ニabstractニ一ツノ変數$x_{\mathfrak{z}}$ヲ對應サセル. 任意ニ一ツノ体Kヲトル. Ωノ有限個ノ点$\{\mathfrak{z}_1, \cdots\cdots, \mathfrak{z}_s\}$ヲ考ヘ、ソレニ對應スル変數$x_{\mathfrak{z}_1}, \cdots\cdots, x_{\mathfrak{z}_s}$ノKニ於ケル多項式ヲ$(\mathfrak{z}_1 \cdots\cdots \mathfrak{z}_s)$多項式トデモ呼ブ. $\{\mathfrak{z}_1, \cdots\cdots, \mathfrak{z}_s\}$ノ部分集合$\{\mathfrak{z}_1, \cdots\cdots, \mathfrak{z}_t\}$ヲトリ、$(\mathfrak{z}_1 \cdots\cdots \mathfrak{z}_s)$多項式$F(\mathfrak{z}_1 \cdots\cdots \mathfrak{z}_s)$及ビ$(\mathfrak{z}_1 \cdots\cdots \mathfrak{z}_t)$多項式$F(\mathfrak{z}_1 \cdots\cdots \mathfrak{z}_t)$ニオイテ、前者ニオイテ$x_{\mathfrak{z}_{t+1}} = \cdots\cdots = x_{\mathfrak{z}_s} = 0$トオイタ時ニ後者ニナル場合ニ、コレヲ

$$F(\mathfrak{z}_1, \cdots\cdots, \mathfrak{z}_s) \gg F(\mathfrak{z}_1 \cdots\cdots \mathfrak{z}_t)$$

トデモ書クコトニスル。

次ニΩニオケル<u>多項式列</u>$\{F; P\}$ヲ次ノ如ク定義スル: Ωニオケル一ツノ第一種集合Pがアッテ, Pニ屬サヌ任意ノ有限個ノ点$\mathfrak{z}_1, \cdots\cdots, \mathfrak{z}_s$ニハ常ニ一ツノ$(\mathfrak{z}_1, \cdots\cdots, \mathfrak{z}_s)$多項式$F(\mathfrak{z}_1 \cdots\cdots \mathfrak{z}_s)$が對應シテ居リ、而シテ$\{\mathfrak{z}_1, \cdots\cdots, \mathfrak{z}_s\} \geqq \{\mathfrak{z}_1, \cdots\cdots \mathfrak{z}_t\}$ナラ常ニ$F(\mathfrak{z}_1 \cdots\cdots \mathfrak{z}_s) \gg F(\mathfrak{z}_1 \cdots\cdots \mathfrak{z}_t)$トナッテヰルトスル、カヽル systemヲ多項式列トヨビ$\{F; P\}$デ表ハス。

二ツノ多項式列$\{F; P_1\}$, $\{G; P_2\}$ニオイテ$P_1 \cup P_2$ヲフクムアル第一種集合ニ屬サヌ$\mathfrak{z}_1 \cdots\cdots \mathfrak{z}_s$ニ対シテハ對應スル多項式が同一デアルナラバ, コレラ両列ハ同値デアルト見テ、以下同一視スルトスル.

又，P_1 ト P_2 ニ對應シ、ソレニ屬サヌ $\mathfrak{z}_1, \cdots\cdots, \mathfrak{z}_s$ ニ對シテハ $F(\mathfrak{z}_1 \cdots\cdots \mathfrak{z}_s) + G(\mathfrak{z}_1 \cdots\cdots \mathfrak{z}_s)$ ガ對應シテキル多項式列（コレガ上記 i), ii) ヲミタスコトハ明カ）ヲ多項式列 $\{F; P_1\}$, $\{G; P_1\}$ ノ和ト定義スル．積ニツイテモ同樣ニスル。

コレニヨッテ多項式列（ノ類）ノ全体 $\mathcal{R}$ ガ一ツノ環ヲナスコト明カデアル。更ニ整域ナルコトモ明カデアラウ。

<u>コノ R ハ *vollständig ganzabgeschlossen*</u> デアル．即チ二ツノ多項式列 $\{F; P_1\}$, $\{G; P_2\}$ 及ビ 0 デナイ $\{H; P_3\}$ ガアッテ、スベテノ $\nu = 1, 2, \cdots\cdots$ ニ對シテ $\{F; P_1\}^{\nu}\{H, P_3\}$ ガ $\{G, P_2\}^{\nu}$ デ割リキレルナラバ $\{F; P_1\}$ ハ $\{G, P_2\}$ デ割リキレル．即チスベテノ ν ニ対シテ $\{F; P_1\}^{\nu}\{H; P_3\} = \{G, P_2\}^{\nu}\{K^{(\nu)}; P^{(\nu)}\}$ ナル多項式列 $\{K^{(\nu)}; P^{(\nu)}\}$ ガアルナラバ $\{F; P_1\} = \{G; P_2\}\{L; P_4\}$ ナル $\{L; P_4\}$ ガアル。

（ソノ証明）　コノ假定ガミタサレテキルトスル。

P_1, P_2, P_3 及ビスベテノ $P^{(\nu)}$（ソレラノ *join* モ勿論第一種集合デアル）ノスベテヲフクム適當ナ第一種集合 P ヲトレバ，ソレニ屬サヌ点ノ有限集合 $\mathfrak{z}_1, \cdots\cdots, \mathfrak{z}_s$ ニ対シテハ常ニ $F(\mathfrak{z}_1, \cdots\cdots, \mathfrak{z}_s)$, $G(\cdots\cdots)$, $H(\cdots\cdots)$, $K^{(\nu)}(\cdots\cdots)$ ガ對應シテ居テ常ニ

$$F(\mathfrak{z}_1 \cdots\cdots \mathfrak{z}_s)^{\nu} H(\cdots\cdots) = G(\cdots\cdots)^{\nu} K^{(\nu)}(\cdots\cdots)$$

トナッテキル．

サテ $\{H; P_3\}$ ハ假定ニヨリ 0 デナイ．マタ $\{G;$

$P_2\}$ ガ 0 ノトキ（従ッテ $\{F;P_1\}$ モ 0 デアル）ニハ主張ハ自明デアルカラ、以下 $\{G;P_2\}$ モ 0 デナイトスル、ヨッテ P ニ属サヌ適當ナ $\mathfrak{p}_1,\cdots\cdots,\mathfrak{p}_s$ ヲトレバ $H(\mathfrak{p}_1\cdots\cdots\mathfrak{p}_s)$ モ $G(\mathfrak{p}_1\cdots\cdots\mathfrak{p}_s)$ モ共ニ 0 デナイ、コノ様ナ $\mathfrak{p}_1\cdots\cdots,\mathfrak{p}_s$ ヲ臨時ニ固定シテ考ヘル。

$\{\mathfrak{p}_1\cdots\cdots\mathfrak{p}_s\}$ ヲフクム $\{\mathfrak{p}_1,\cdots\cdots,\mathfrak{p}_r\}$ ニ対シテハ勿論 $H(\mathfrak{p}_1\cdots\cdots\mathfrak{p}_r\}$ モ $G(\mathfrak{p}_1\cdots\cdots\mathfrak{p}_r)$ モ 0 デナイ（多項式列ノ條件参照）、シカルニスベテノ ν ニ對シテ $F(\mathfrak{p}_1\cdots\cdots\mathfrak{p}_r)^\nu H(\mathfrak{p}_1\cdots\cdots\mathfrak{p}_r)$ ハ $G(\mathfrak{p}_1\cdots\cdots\mathfrak{p}_r)^\nu$ デ割リキレルノデアル。ヨッテ $x_{\mathfrak{p}_1},\cdots\cdots,x_{\mathfrak{p}_r}$ ノ多項式 $F(\mathfrak{p}_1\cdots\cdots\mathfrak{p}_r)$ ハ $G(\mathfrak{p}_1\cdots\cdots\mathfrak{p}_r)$ デワリキレル；$K[x_{\mathfrak{p}_1},\cdots\cdots,x_{\mathfrak{p}_r}]$ ナル多項式域ハ *vollständig ganz-abgeschlossen* ダカラ!!

即チ

$$F(\mathfrak{p}_1\cdots\cdots\mathfrak{p}_r)=G(\mathfrak{p}_1\cdots\cdots\mathfrak{p}_r)L(\mathfrak{p}_1\cdots\cdots\mathfrak{p}_r)$$

ナル $(\mathfrak{p}_1\cdots\cdots\mathfrak{p}_r)$ 多項式 $L(\mathfrak{p}_1\cdots\cdots\mathfrak{p}_r)$ ガ存在スル。シカモ $G(\mathfrak{p}_1\cdots\cdots\mathfrak{p}_r)\neq 0$ ダカラ一意的ニ定マル。而シテ $\{\mathfrak{p}_1\cdots\cdots\mathfrak{p}_m\}\geqq\{\mathfrak{p}_1\cdots\cdots\mathfrak{p}_r\}$ ナラ $L(\mathfrak{p}_1\cdots\cdots\mathfrak{p}_m)\gg L(\mathfrak{p}_1\cdots\cdots\mathfrak{p}_r)$ トナッテヰル、ソレハ $F(\mathfrak{p}_1\cdots\cdots\mathfrak{p}_m)\gg F(\mathfrak{p}_1\cdots\cdots\mathfrak{p}_r)$ 及ビ G ノ同様ナ関係ヨリ明カデアル。

サテ P ニ属サヌ点ノ任意ノ有限個 $q_1,\cdots\cdots,q_t$ ニ対シテハ $q_1,\cdots\cdots q_t$ 及ビ上記 $\mathfrak{p}_1,\cdots\cdots,\mathfrak{p}_s$ ヲフクム（P ニ属サヌ）任意ノ有限点集合 $\mathfrak{p}_1\cdots\cdots\mathfrak{p}_r$ ヲトッテ $L(\mathfrak{p}_1\cdots\cdots\mathfrak{p}_r)$ ヲ考ヘ、ソコニ於テ $q_1,\cdots\cdots q_t$ ニ属サヌ他ノ

変数ヲミナ1トシテ生ズル所ノ($\eta_1 \cdots\cdots \eta_t$)多項式ヲ$L(\eta_1 \cdots\cdots \eta_r)$ト定義スル. コレハ$\xi_1 \cdots\cdots \xi_r$ノトリ方ニ無関係ノコトハ上記ヨリ明カデアル. 更ニ、$\{\eta_1 \cdots\cdots \eta_u\} \subseteq \{\eta_1 \cdots\cdots \eta_t\}$ノトキ$L(\eta_1 \cdots\cdots \eta_u) \ll L(\eta_1 \cdots\cdots \eta_t)$ナルコトモ明カデアル. 何故ナラ$L(\eta_1 \cdots\cdots \eta_t)$ヲ得タ上デ更ニ$x_{\eta_{u+1}}, \cdots\cdots x_{\eta_t}$ヲ$0$ニスレバヤハリ$L(\eta_1 \cdots\cdots \eta_u)$トナルベキダカラデアル。

ヨッテ, コノ$L(\cdots\cdots)$ニヨッテ一ツノ多項式$\{L;P\}$が得ラレル. シカモ$\{F;P_1\} = \{G;P_2\}\{L;P\}$デアル. 何者, $\{\xi_1 \cdots\cdots \xi_r\} \supseteq \{\xi_1 \cdots\cdots \xi_s\}$ニ対シテハ

$$F(\xi_1 \cdots\cdots \xi_r) = G(\cdots\cdots)L(\cdots\cdots)$$

デアリ、シタガッテ変数ノ幾ツカヲ1ニスル事ニヨッテ任意ノ$\eta_1 \cdots\cdots \eta_t$ ($\ni P$) ニ対シテモ$F(\eta_1 \cdots\cdots \eta_t) = G(\cdots\cdots)L(\cdots\cdots)$トナルカラデアル。

ヨッテ我々ノ多項式列ノ環Rが vollständig ganzäbgescher ナ整域ナルコトが証明サレタ。

サテ、初メニ考ヘタ束群ノ元、スナハチΩニオケル整数又ハ$\pm\infty$値連続函数fデアル nowhere dense set Nニオイテノミ$\pm\infty$トナルモノヲ考ヘル. シカシテ$f \geqq 0$ナルfニ対シテ次ノ如キ多項式列が対応サセラレル、即チNニ属サヌ$\xi_1 \cdots\cdots \xi_s$ニ対シテ

$$x_{\xi_1}^{f(\xi_1)} x_{\xi_2}^{f(\xi_2)} \cdots\cdots x_{\xi_s}^{f(\xi_s)}$$

ヲ対応サセル様ナ多項式列デアル、コノ多項式列ヲ簡単

ニ $\{x^f ; N\}$ デ表ハス、シカラバ

$$\{x^{f_1} ; N_1\} \times \{x^{f_2} ; N_2\} = \{x^{f_1+f_2} ; N_3\}$$

デアルコトハ明カデアル。

而シテ、二ツノ $\{x^{f_1} ; N_1\}$, $\{x^{f_2} ; N_2\}$ ニ於テ前者ガ後者デ $\mathfrak{R}$ ノ中デ割リキレルノハ $f_1 \geqq f_2$ ナル時ニ限ルコトハ Ω ノ（両者ガ有限ナ）各点デ考ヘテミレバワカル。

カク $f \geqq 0$ ナル f ニハ多項式列 $\{x^f ; N\}$ ガ對應スルガ $\geqq 0$ トカギラズ一般ノ元 f ニ対シテハ

$$f = f_1 - f_2 \qquad (f_1 \geqq 0,\ f_2 \geqq 0)$$

トシテ $\mathfrak{R}$ ノ商体ニオケル $\{x^{f_1} ; N_1\}/\{x^{f_2} ; N_2\}$ ヲ對應サセル、ココニ f_1, f_2 ノトリ方ニ無関係ナ f ノミデコノ商ガキマルコトハ勿論明カデアル。カクテコノ對應ニヨリ我々ノ束群（加法デ書イタガ）ガ $\mathfrak{R}$ ノ商体ニオケル $\{x^{f_1} ; N_1\}/\{x^{f_2} ; N_2\}$ ナル形ノ元ノナス乗法群ト同型ニナル。シカシテ束群ノ $\geqq 0$ ナル元ハ丁度コノ乗法群中 $\in \mathfrak{R}$ ナルモノニ對應スル。

今假ニ $\mathfrak{R}$ ガソノ商体ニオケル speziell ナ Bewertungsringe ノ durchschnitt ニナッテヰルトスレバ Bewertungen ヲ我々ノ乗法群ニツイテ考ヘ更ニ束群ニ移ッテミレバ、ソレハ我々ノ束群ガ實數値ノ函数デ同型ニ表現サレタコトニナル（單ニ準同型デナク、"同型"ナコトハスベテノ Wert ガ $\geqq 0$ ナラ $\in \mathfrak{R}$, 従ッテ對應スル元ガ束群デ $\geqq 0$ ナルコトカラデアル）。コ

レハ矛盾。

ヨッテ R ハ speziell ナ Bewertungsringe ノ Durchschnitt トハナリ得ナイ、故ニ Krull ノ豫想ノ反例ガ得ラレタワケデアル。

—— 以上 ——